



Meccanica

2. Rappresentazioni dei Vettori

<http://campus.cib.unibo.it/245949/>

Domenico Galli

Dipartimento di Fisica e Astronomia

5 maggio 2017



1. Terna Ortogonale di Riferimento
2. Sistema di Coordinate
3. Base di Versori
4. Curvatura e Torsione
5. Rappresentazioni dei Vettori

I vettori possono essere **rappresentati algebricamente**:

1. Fissando una terna d'assi orientati, mutuamente ortogonali, detta **terna ortogonale di riferimento**;
2. In relazione a tale terna ortogonale di riferimento, scegliendo un **sistema di coordinate**, che consenta di identificare univocamente i punti dello spazio;
3. In relazione a tale sistema di coordinate, scegliendo una **base di versori** su cui **proiettare** i vettori.

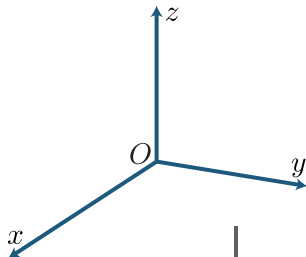
Terna Ortogonale di Riferimento

Costituita da **3 rette orientate** (o **assi**), x , y e z :

- A due a due **perpendicolari**;
- Aventi un **punto in comune** O detto **origine**.

Esistono **infinite possibili scelte** dell'**origine** O :

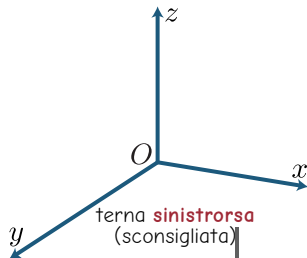
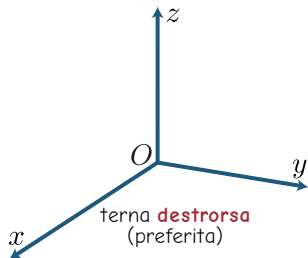
- Per ciascuna di tali scelte, esistono **infinite possibili scelte** delle **direzioni** degli **assi**.



Terna Ortogonale di Riferimento (II)

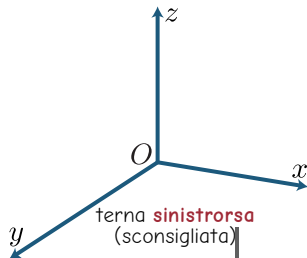
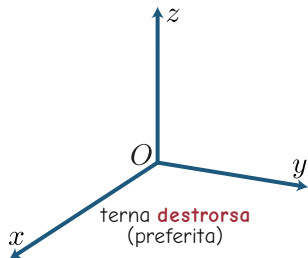
Le infinite terne ortogonali di riferimento si ripartiscono in **due insiemi disgiunti**:

- (a) Quelle in cui gli assi x , y e z sono orientati come pollice, indice e medio della mano destra:
 - Dette **terne ortogonali destrorse**;
- (b) Quelle in cui gli assi x , y e z sono orientati come pollice, indice e medio della mano sinistra:
 - Dette **terne ortogonali sinistrorse**.



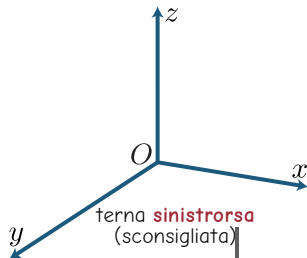
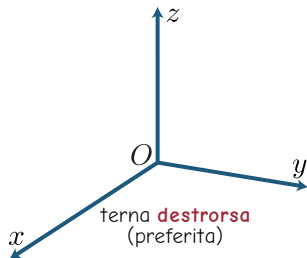
Terna Ortogonale di Riferimento (III)

- Una terna **destrorsa** (sinistrorsa) può essere trasformata in una qualunque altra terna **destrorsa** (sinistrorsa) mediante una **roto-traslazione** degli assi;
- Una **roto-traslazione non** può invece trasformare una terna **destrorsa** (sinistrorsa) in una terna **sinistrorsa** (destrorsa):
 - È necessaria una **riflessione speculare** degli assi.



Terna Ortogonale di Riferimento (IV)

- Una terna ortogonale di riferimento ha **2 possibili chiralità**:
 - Destrorsa** e **sinistrorsa**.
- Il termine “chiralità” deriva dal greco antico $\chiείρ$, $\chiειρός$, traslitterato *kheír*, *kheirós*, che letteralmente significa **mano**;
- La scelta della chiralità è **convenzionale** ma in pratica — per evitare ambiguità e discordanze nei calcoli — si considerano **sempre** e **solamente** terne ortogonali di riferimento **destrorse**.



È un insieme ordinato di **3 numeri reali**, (a, b, c) che possano identificare univocamente un **punto P dello spazio**:

- Sono richiesti **3 numeri** in quanto lo spazio ordinario ha 3 dimensioni.
- Esistono molti sistemi di coordinate:
 - In questo corso considereremo soltanto i sistemi:
 - ▶ **Cartesiano**: (x, y, z) ;
 - ▶ **Cilindrico**, detto anche **semi-polare**: (r, φ, z) ;
 - ▶ **Sferico**, detto anche **polare**: (ρ, θ, φ) ;
 - ▶ **Intrinseco**: s .

Distanze del punto P dai piani formati dalle coppie di assi cartesiani:

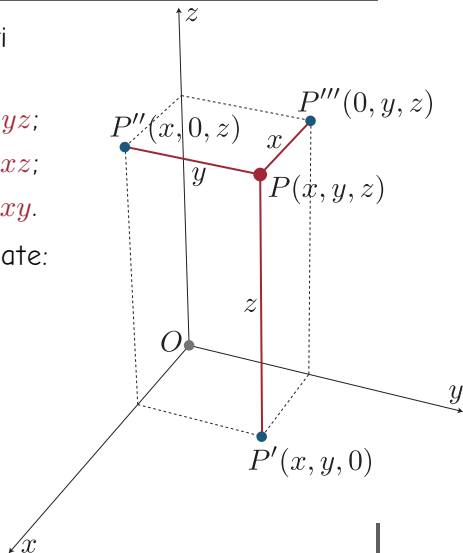
1. x : **distanza** del punto P dal **piano** yz ;
2. y : **distanza** del punto P dal **piano** xz ;
3. z : **distanza** del punto P dal **piano** xy .

● Intervalli di variabilità delle coordinate:

$$x \in]-\infty, +\infty[$$

$$y \in]-\infty, +\infty[$$

$$z \in]-\infty, +\infty[$$



Coordinate Cilindriche (o Semi-Polari)

1. r : **distanza radiale** del punto P dall'asse z ;
2. φ : **angolo azimutale** (detto anche **anomalia** o **longitudine**);
3. z : **distanza** del punto P dal **piano** xy .

● Intervalli di variabilità delle coordinate:

$$r \in [0, +\infty[$$

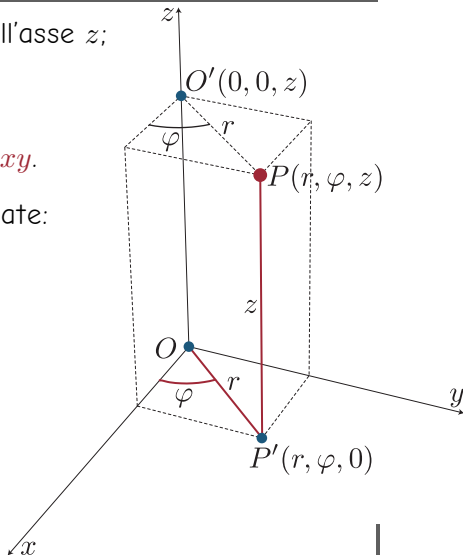
$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

$$z \in]-\infty, +\infty[$$

● **Singularità:**

● $r = 0$ (lungo l'asse z):

► Coordinata φ **indeterminata**.



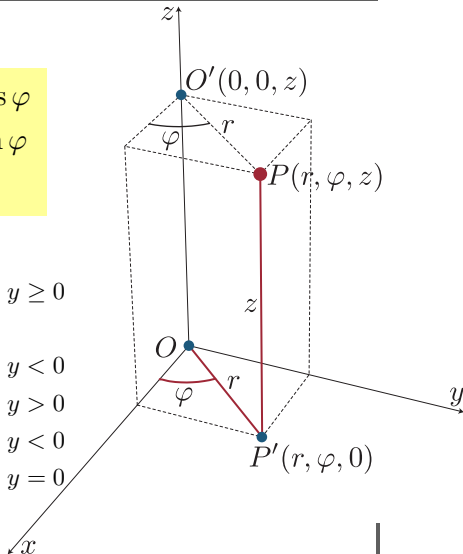
Relazioni tra Coordinate Cilindriche e Coordinate Cartesiane

Risulta:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \text{Arctan}(y, x) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

dove:

$$\text{Arctan}(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, y < 0 \\ \frac{1}{2} \pi & \text{se } x = 0, y > 0 \\ \frac{3}{2} \pi & \text{se } x = 0, y < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, y = 0 \end{cases}$$



La Funzione di 2 Argomenti $\text{Arctan}(y, x)$

- La funzione $\text{Arctan}(y, x)$ è molto utile nella grafica 3D su computer:
 - Disponibile in molti linguaggi di programmazione con il nome **atan2**:
 - FORTRAN, C, Java, Python, Ruby, C#, C++, Perl, ecc.
- Per la precisione, la funzione **atan2** produce un risultato nell'intervallo $\varphi \in]-\pi, \pi]$, ed è pertanto definita, in maniera simile, come:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{se } x < 0, y < 0 \\ \frac{1}{2} \pi & \text{se } x = 0, y > 0 \\ -\frac{1}{2} \pi & \text{se } x = 0, y < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

- Le due definizioni individuano, comunque, lo **stesso angolo**:
 - Due angoli sono uguali se la loro misura differisce di $2\pi n$ rad, con $n \in \mathbb{Z}$.
- Mentre il risultato "ingenuo" $\arctan \frac{y}{x}$ individua un angolo **diverso** (ed **errato**) quando $x < 0$.

Coordinate Sferiche (o Polari)

1. ρ : **distanza radiale** del punto P dall'origine O ;
2. θ : **angolo polare** (detto anche **colatitudine**);
3. φ : **angolo azimutale** (detto anche **longitudine**);

● Intervalli di variabilità delle coordinate:

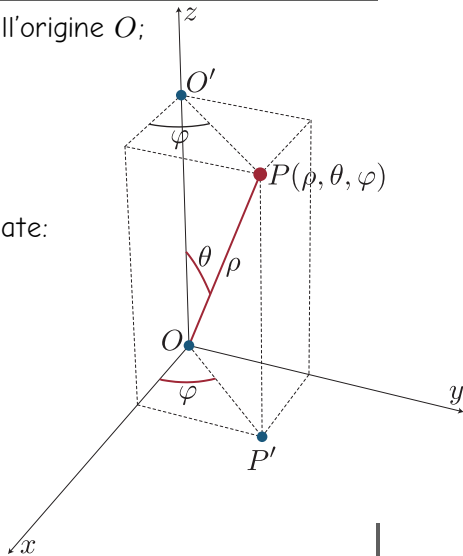
$$\rho \in [0, +\infty[$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

● **Singularità:**

- $\theta = 0, \pi$ (lungo l'asse z):
 - Coordinata φ **indeterminata**;
- $\rho = 0$ (nell'origine O):
 - Coordinate θ e φ **indeterminate**.



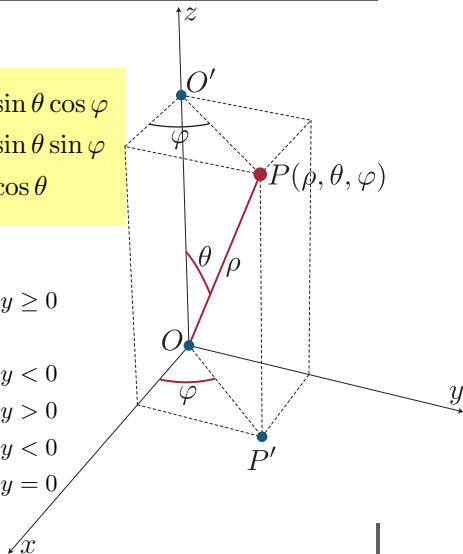
Relazioni tra Coordinate Sferiche e Coordinate Cartesiane

Risulta:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \text{Arctan}(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \\ \varphi = \text{Arctan}(y, x) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

dove:

$$\text{Arctan}(y, x) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, y < 0 \\ \frac{1}{2} \pi & \text{se } x = 0, y > 0 \\ \frac{3}{2} \pi & \text{se } x = 0, y < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, y = 0 \end{cases}$$



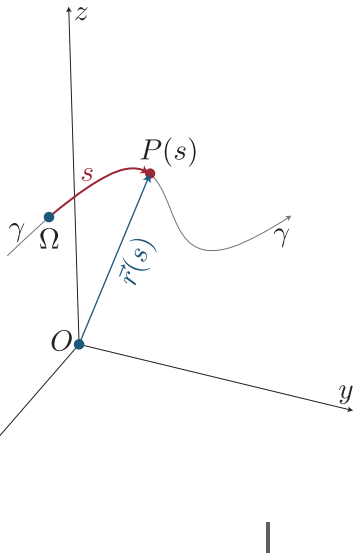
Si tratta di una coordinata soltanto:

1. s : **distanza curvilinea** del punto P **dall'origine** Ω (fissata sulla curva) misurata **lungo la traiettoria** γ , cioè lunghezza dell'arco:

$$s = \widehat{\Omega P}$$

- Si può utilizzare se è nota a priori l'**equazione della traiettoria**:

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$



Dato un sistema di coordinate, è possibile costruire, in ogni punto P dello spazio, un insieme di tre versori (detto **base di versori**):

- Attribuendo, a turno, un **piccolo incremento positivo** a **ciascuna** delle **coordinate** del punto P ;
- A seguito di tali incrementi il punto P esegue tre diversi **piccoli spostamenti** nello spazio;
- Nella **direzione** e nel **verso** di questi tre piccoli **spostamenti**, nel limite in cui essi **tendono a zero**, si prendono tre **versori**.

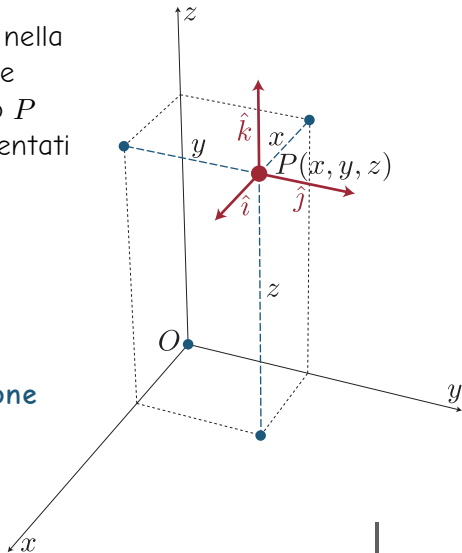
Base di Versori Cartesiana

Applicando il **procedimento** illustrato nella **diapositiva 16** al sistema di coordinate cartesiane, otteniamo, per ogni punto P dello spazio, i versori $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ rappresentati in figura:

$$\begin{cases} \hat{i} \nearrow \nearrow x \\ \hat{j} \nearrow \nearrow y \\ \hat{k} \nearrow \nearrow z \end{cases}$$

I versori **non dipendono** dalla **posizione** del punto P :

- La **base di versori cartesiana** è **globale**.



Relazioni di Ortonormalità tra i Versori della Base Cartesiana

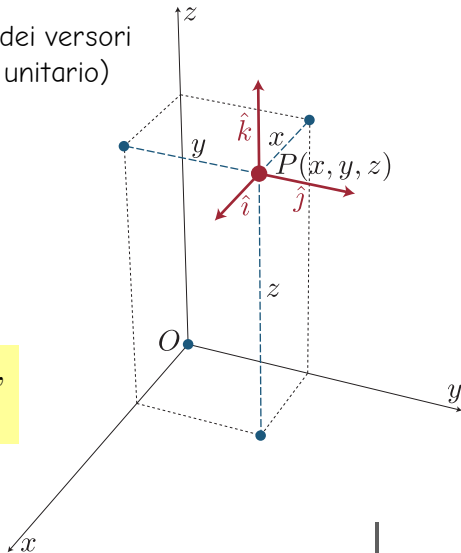
12 relazioni esprimono l'**ortogonalità** dei versori della base, la loro **normalità** (modulo unitario) e la loro **chiralità** (destrorsa):

● Prodotti **scalari**:

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= 1, & \hat{j} \cdot \hat{j} &= 1, & \hat{k} \cdot \hat{k} &= 1, \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= 0, & \hat{j} \cdot \hat{k} &= 0, & \hat{k} \cdot \hat{i} &= 0.\end{aligned}$$

● Prodotti **vettoriali**:

$$\begin{aligned}\hat{i} \wedge \hat{i} &= \vec{0}, & \hat{j} \wedge \hat{j} &= \vec{0}, & \hat{k} \wedge \hat{k} &= \vec{0}, \\ \hat{i} \wedge \hat{j} &= \hat{k}, & \hat{j} \wedge \hat{k} &= \hat{i}, & \hat{k} \wedge \hat{i} &= \hat{j}.\end{aligned}$$

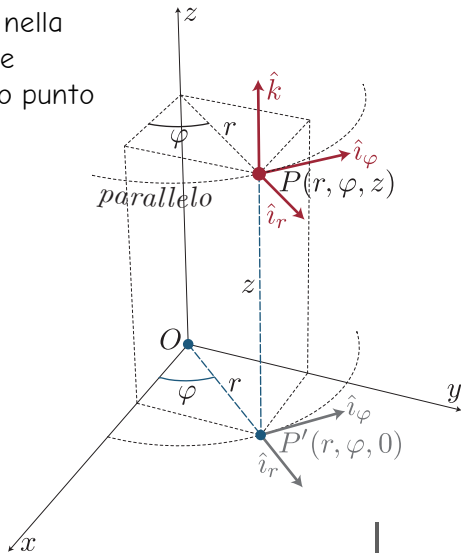


Applicando il **procedimento** illustrato nella **diapositiva 16** al sistema di coordinate cilindriche, otteniamo, per un generico punto P dello spazio, i versori $\{\hat{i}_r, \hat{i}_\varphi, \hat{k}\}$ rappresentati in figura:

$$\begin{cases} \hat{i}_r = \text{vers}(\vec{r}_{OP'}) = \frac{\vec{r}_{OP'}}{\|\vec{r}_{OP'}\|} \\ \hat{i}_\varphi = \hat{k} \wedge \hat{i}_r \\ \hat{k} \uparrow\uparrow z \end{cases}$$

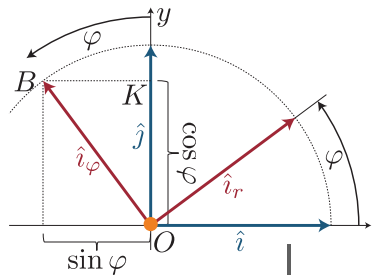
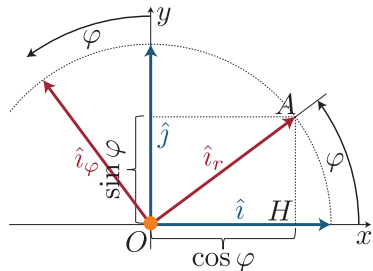
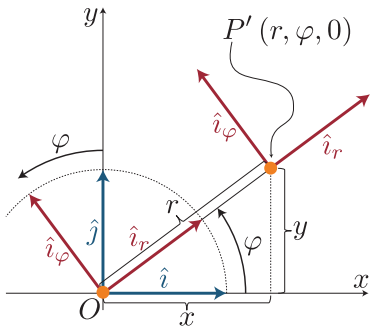
I versori **dipendono** dalla **posizione** del punto P :

- La **base di versori cilindrica** è **locale**.



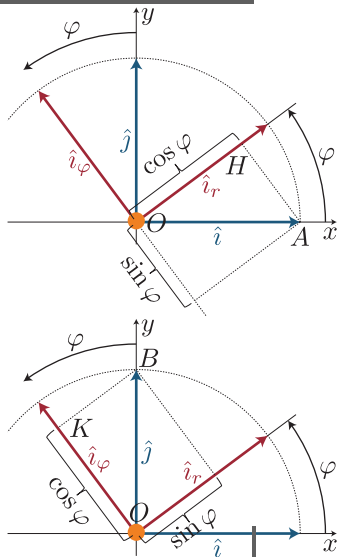
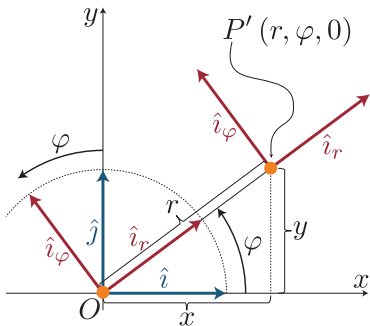
Relazioni tra Base Cilindrica e Base Cartesiana

$$\begin{cases} \hat{i}_r(\varphi) = (\cos \varphi) \hat{i} + (\sin \varphi) \hat{j} \\ \hat{i}_\varphi(\varphi) = -(\sin \varphi) \hat{i} + (\cos \varphi) \hat{j} \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$



Relazioni tra Base Cilindrica e Base Cartesiana (II)

$$\begin{cases} \hat{i} = (\cos \varphi) \hat{i}_r(\varphi) - (\sin \varphi) \hat{i}_\varphi(\varphi) \\ \hat{j} = (\sin \varphi) \hat{i}_r(\varphi) + (\cos \varphi) \hat{i}_\varphi(\varphi) \\ \hat{k} = \hat{k} \end{cases}$$



Relazioni di Ortonormalità tra i Versori della Base Cilindrica

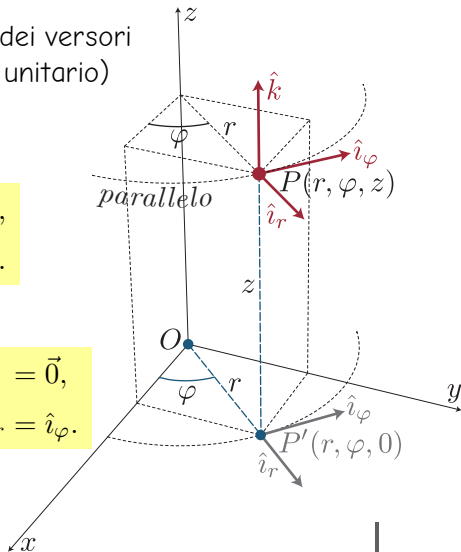
12 relazioni esprimono l'**ortogonalità** dei versori della base, la loro **normalità** (modulo unitario) e la loro **chiralità** (destrorsa):

● Prodotti **scalari**:

$$\begin{aligned}\hat{i}_r \cdot \hat{i}_r &= 1, & \hat{i}_\varphi \cdot \hat{i}_\varphi &= 1, & \hat{k} \cdot \hat{k} &= 1, \\ \hat{i}_r \cdot \hat{i}_\varphi &= 0, & \hat{i}_\varphi \cdot \hat{k} &= 0, & \hat{k} \cdot \hat{i}_r &= 0.\end{aligned}$$

● Prodotti **vettoriali**:

$$\begin{aligned}\hat{i}_r \wedge \hat{i}_r &= \vec{0}, & \hat{i}_\varphi \wedge \hat{i}_\varphi &= \vec{0}, & \hat{k} \wedge \hat{k} &= \vec{0}, \\ \hat{i}_r \wedge \hat{i}_\varphi &= \hat{k}, & \hat{i}_\varphi \wedge \hat{k} &= \hat{i}_r, & \hat{k} \wedge \hat{i}_r &= \hat{i}_\varphi.\end{aligned}$$

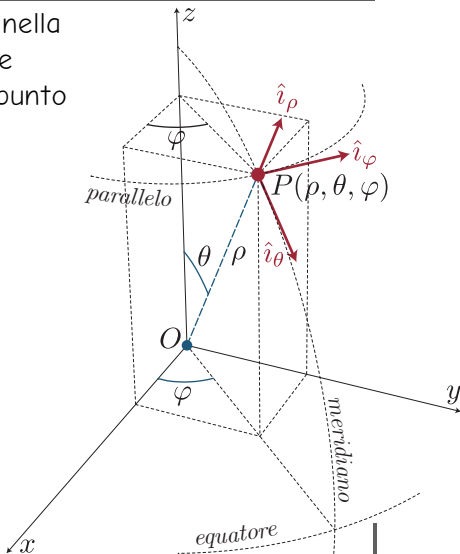


Applicando il **procedimento** illustrato nella **diapositiva 16** al sistema di coordinate sferiche, otteniamo, per un generico punto P dello spazio, i versori $\{\hat{i}_\rho, \hat{i}_\theta, \hat{i}_\varphi\}$ rappresentati in figura:

$$\begin{cases} \hat{i}_\rho = \frac{\vec{r}_{OP}}{\|\vec{r}_{OP}\|} \\ \hat{i}_\theta = \hat{i}_\varphi \wedge \hat{i}_\rho \\ \hat{i}_\varphi = \frac{\hat{k} \wedge \hat{i}_\rho}{\sin \theta} \end{cases}$$

I versori **dependono** dalla **posizione** del punto P :

- La **base di versori sferica** è **locale**.



Relazioni di Ortonormalità tra i Versori della Base Sferica

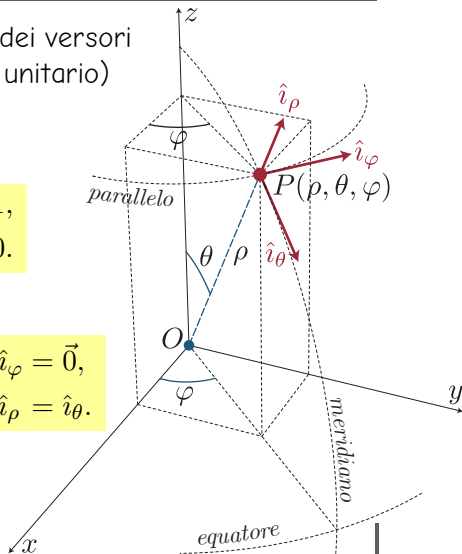
12 relazioni esprimono l'**ortogonalità** dei versori della base, la loro **normalità** (modulo unitario) e la loro **chiralità** (destrorsa):

● Prodotti **scalari**:

$$\begin{aligned}\hat{i}_\rho \cdot \hat{i}_\rho &= 1, & \hat{i}_\theta \cdot \hat{i}_\theta &= 1, & \hat{i}_\varphi \cdot \hat{i}_\varphi &= 1, \\ \hat{i}_\rho \cdot \hat{i}_\theta &= 0, & \hat{i}_\theta \cdot \hat{i}_\varphi &= 0, & \hat{i}_\varphi \cdot \hat{i}_\rho &= 0.\end{aligned}$$

● Prodotti **vettoriali**:

$$\begin{aligned}\hat{i}_\rho \wedge \hat{i}_\rho &= \vec{0}, & \hat{i}_\theta \wedge \hat{i}_\theta &= \vec{0}, & \hat{i}_\varphi \wedge \hat{i}_\varphi &= \vec{0}, \\ \hat{i}_\rho \wedge \hat{i}_\theta &= \hat{i}_\varphi, & \hat{i}_\theta \wedge \hat{i}_\varphi &= \hat{i}_\rho, & \hat{i}_\varphi \wedge \hat{i}_\rho &= \hat{i}_\theta.\end{aligned}$$



Base di Versori Intrinseca

Detta anche Base TNB o Base di Frenet-Serret

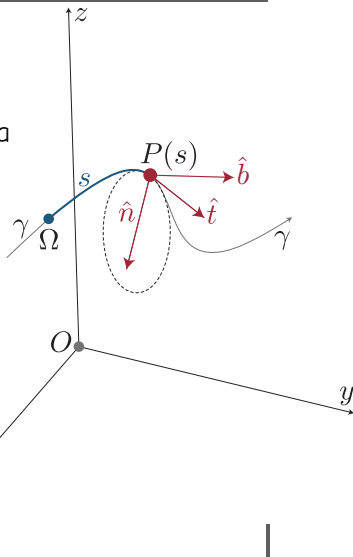
Applicando il **procedimento** illustrato nella **diapositiva 16** al sistema di coordinate intrinseche, otteniamo, per un generico punto P della traiettoria γ , il **versore \hat{t} tangente** alla traiettoria, rappresentato in figura. A questo aggiungiamo:

- Il **versore \hat{n} normale** alla traiettoria;
- Il **versore \hat{b} binormale** alla traiettoria.

L'orientamento dei versori è "**guidato**" dalla traiettoria.

I versori **dipendono** dalla **posizione** del punto P sulla traiettoria γ :

- Si dice che la **base di versori intrinseca** è **locale**.

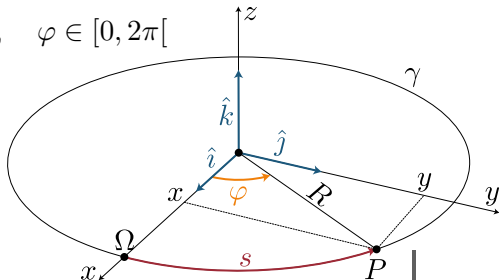


Parametrizzazione di una Curva

Una generica **linea curva** γ dello spazio ordinario \mathbb{R}^3 può essere **descritta** mediante una **parametrizzazione**:

- Ovvero assegnando una **funzione vettoriale** $\vec{r} = \vec{r}(\eta)$ che associ, a ogni numero reale η di un certo intervallo $[\eta_{\min}, \eta_{\max}] \subseteq \mathbb{R}$, il vettore posizionale $\vec{r}(\eta)$ di un punto $P(\eta)$ della curva γ .
- Per esempio, nel caso di una traiettoria circolare di raggio R , usando l'angolo al centro φ come parametro:

$$\vec{r}(\varphi) = R(\cos \varphi) \hat{i} + R(\sin \varphi) \hat{j}, \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

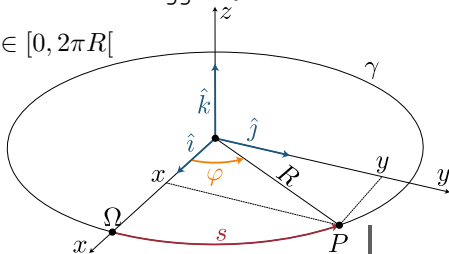


Parametrizzazione di una Curva in Lunghezza d'Arco

Una **parametrizzazione** della curva γ può utilizzare, **come parametro** η , la **coordinata intrinseca** s :

- Associando pertanto a ogni valore della coordinata intrinseca s in un certo intervallo $[s_{\min}, s_{\max}] \subseteq \mathbb{R}$, il vettore posizionale $\vec{r}(s)$ di un punto $P(s)$ che si trovi alla coordinata intrinseca s sulla curva γ .
- In tal caso la parametrizzazione è detta **parametrizzazione in lunghezza d'arco** o **parametrizzazione canonica** oppure **parametrizzazione naturale** o ancora **parametrizzazione a velocità unitaria**:
- Per esempio, nel caso di una traiettoria circolare di raggio R :

$$\vec{r}(s) = R \left(\cos \frac{s}{R} \right) \hat{i} + R \left(\sin \frac{s}{R} \right) \hat{j}, \quad s \in [0, 2\pi R[$$



Il **vettore tangente** \hat{t} risulta espresso dalla relazione:

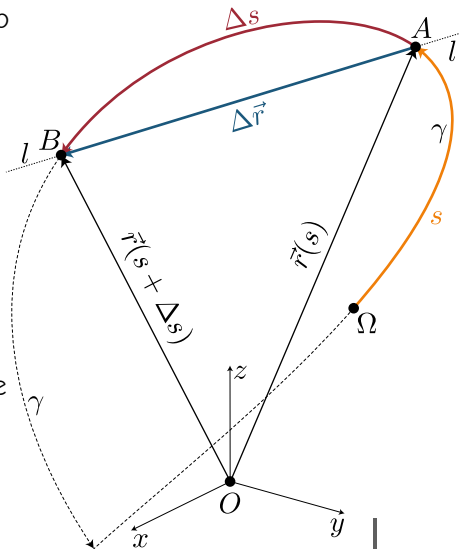
$$\hat{t}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(s)}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s} \end{aligned}$$

Consideriamo il rapporto incrementale (senza limite):

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s}$$

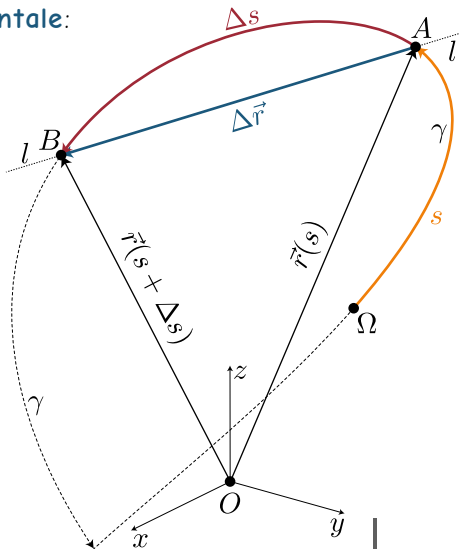


Versore Tangente (II)

Il **numeratore del rapporto incrementale**:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)$$

ha la **direzione** della retta l , **secante** la curva γ nei punti A e B .

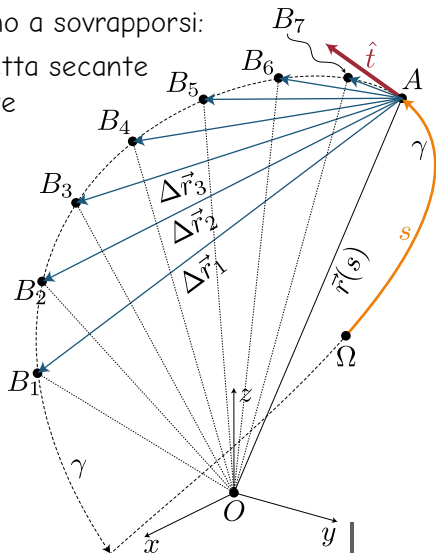


Vettore Tangente (III)

Nel **limite** $\Delta s \rightarrow 0$ i punti A e B tendono a sovrapporsi:

- Dalla geometria sappiamo che una retta secante di una curva tende alla retta tangente alla curva quando i due punti di intersezione tendono a coincidere.
- La **secante** diviene **tangente**:

$$\text{vers}(\Delta \vec{r}) \xrightarrow{\Delta s \rightarrow 0} \hat{t}$$



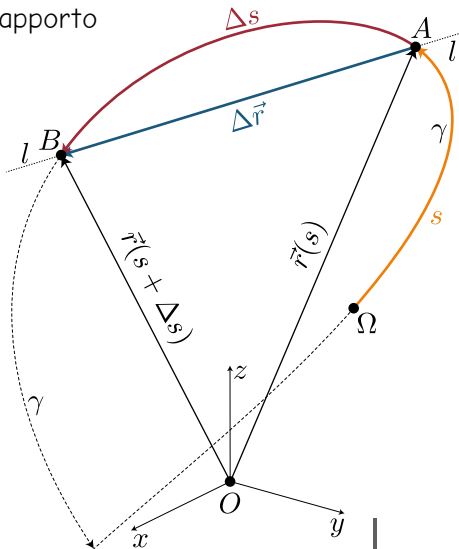
Vettore Tangente (IV)

Il **modulo** $\|\Delta\vec{r}\|$ del numeratore del rapporto incrementale:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)$$

è la lunghezza della **corda** AB ,
che è **minore** della lunghezza
 Δs dell'**arco** AB :

$$\overline{AB} \leq \widehat{AB} \Rightarrow \|\Delta\vec{r}\| \leq \Delta s$$



Vettore Tangente (V)

Tuttavia, nel **limite** $\Delta s \rightarrow 0$ il punto B si avvicina indefinitamente al punto A :

- **Arco** e **corda** tendono ad assumere la **medesima lunghezza**:

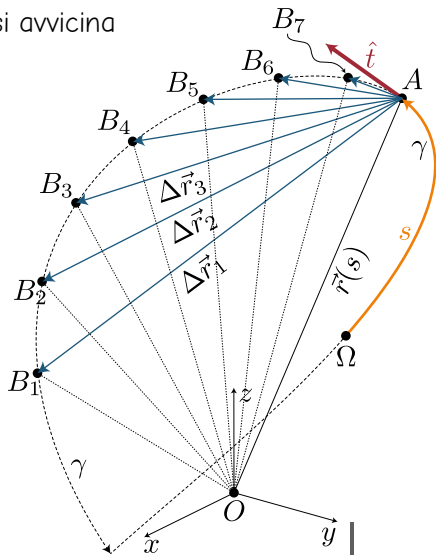
$$\overline{AB} \sim \widehat{AB}, \quad \Delta s \rightarrow 0$$

$$\|\Delta \vec{r}\| \sim \Delta s, \quad \Delta s \rightarrow 0$$

- Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s) = \\ &= \|\Delta \vec{r}\| \text{vers}(\Delta \vec{r}) \end{aligned}$$

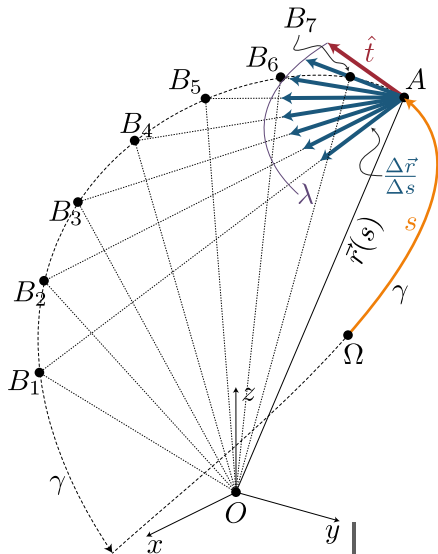
$$\Delta \vec{r} \sim \Delta s \hat{t}, \quad \Delta s \rightarrow 0$$



Sostituendo:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}(s)}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s \hat{t}}{\Delta s} = \hat{t}\end{aligned}$$

$$\hat{t}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$$



Piano Osculatore e Circonferenza Osculatrice

Gli altri due versori della base intrinseca (versore **normale** e versore **binormale**) si costruiscono mediante la **circonferenza osculatrice**.

● Per **individuare piano osculatore** e **circonferenza osculatrice**:

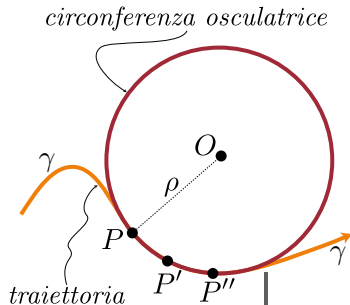
- Si prendono **3 punti** sulla traiettoria:

- ▶ **Infinitamente vicini ma non coincidenti**;

- Per 3 punti non coincidenti passa un solo piano (piano osculatore) e una sola circonferenza (circonferenza osculatrice).

● La **circonferenza osculatrice** è **tangente** in P alla curva γ e l'approssima al **secondo ordine**.

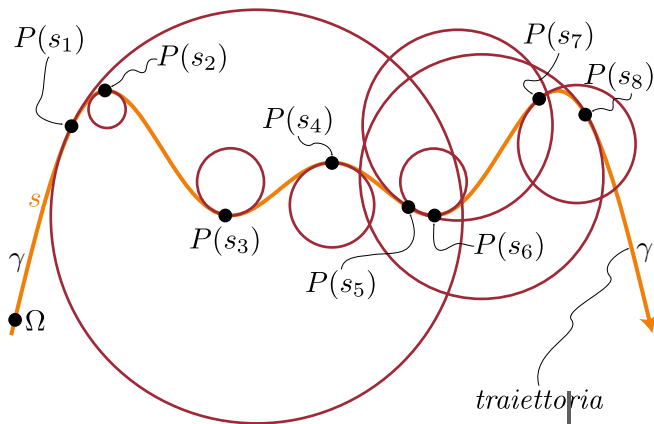
● Il raggio ρ della circonferenza osculatrice alla traiettoria γ nel punto P è detto **raggio di curvatura** della traiettoria γ nel punto P .



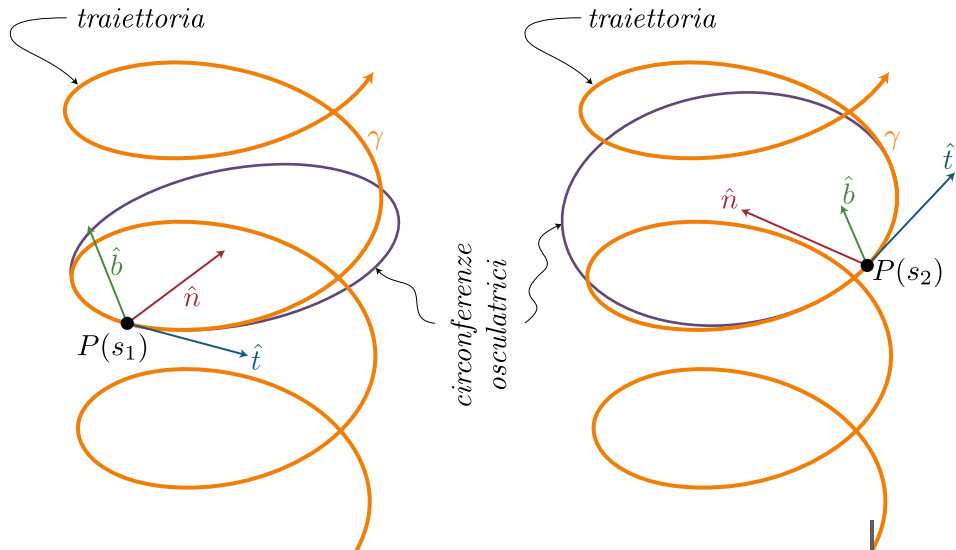
Piano Osculatore e Circonferenza Osculatrice (II)

Se la curva γ **non** è una **circonferenza**, in generale:

- Il **centro di curvatura** O **cambia da punto a punto** della curva γ .
- Il **raggio di curvatura** ρ **cambia da punto a punto** della curva γ .



Piano Osculatore e Circonferenza Osculatrice (III)



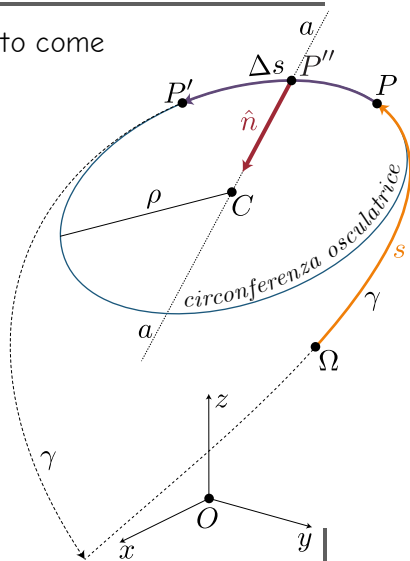
Il **versore normale** \hat{n} nel punto P è diretto come il raggio della circonferenza osculatrice alla curva γ nel punto P .

Il **versore normale** \hat{n} risulta espresso dalla relazione:

$$\hat{n}(s) = \rho \frac{d\hat{t}(s)}{ds}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{t}(s)}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)}{\Delta s} \end{aligned}$$



Versore Normale (II)

Consideriamo il rapporto incrementale (senza limite):

$$\frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s} = \frac{\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)}{\Delta s}$$

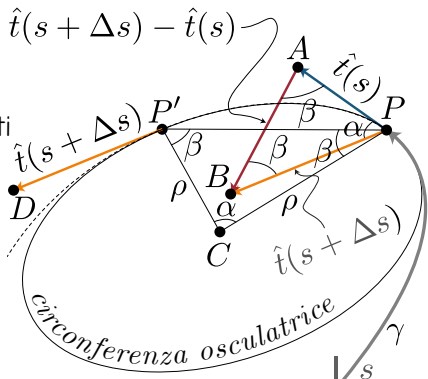
e consideriamo la **direzione** e il **verso** del numeratore.

Osserviamo che:

$$\widehat{APB} = \widehat{PCP'}$$

in quanto l'angolo \widehat{APB} è formato dai lati PA e PB , che sono rispettivamente perpendicolari ai lati CP e CP' che formano l'angolo $\widehat{PCP'}$:

- Perché la **tangente** a una curva è sempre **perpendicolare** al **raggio** nel punto di tangenza.



Osserviamo anche che il triangolo $P\hat{A}B$ è **isoscele**:

- Infatti i lati PA e PB hanno entrambi lunghezza unitaria essendo entrambi versori.

Pertanto \widehat{PAB} ha gli **angoli alla base uguali**:

$$P\hat{A}B = P\hat{B}A$$

Detti:

$$\alpha = A\hat{P}B, \quad \beta = P\hat{A}B = P\hat{B}A$$

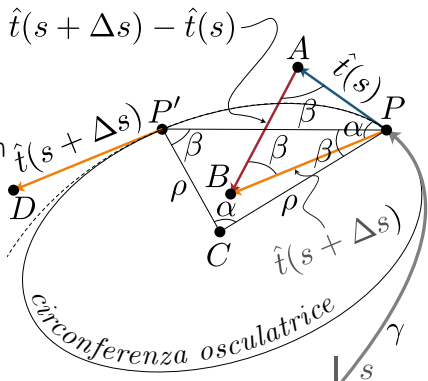
Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a un angolo piatto, si ha:

$$\alpha + 2\beta = \pi$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

Nel limite $\Delta s \rightarrow 0$ si ha:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \sim \frac{\pi}{2}, \quad \Delta s \rightarrow 0$$



Versore Normale (IV)

Dunque nel limite $\Delta s \rightarrow 0$ si ha:

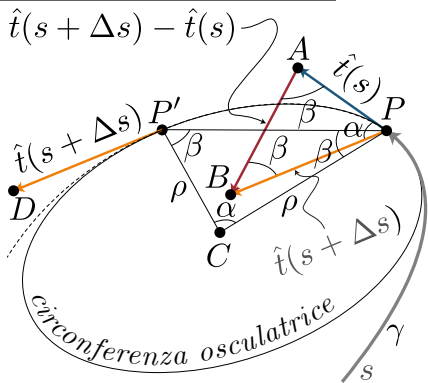
$$[\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)] \perp \hat{t}(s), \quad \Delta s \rightarrow 0$$

Poiché $\hat{t}(s)$ e $\hat{t}(s + \Delta s)$ giacciono entrambi sul piano osculatore, anche $\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)$ giace sul piano osculatore.

Segue che $\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)$ ha la **direzione del versore normale** \hat{n} nel limite $\Delta s \rightarrow 0$.

Il **verso** del vettore $\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)$ è diretto verso il centro della circonferenza osculatrice (**centripeto**) come il **versore normale** \hat{n} :

$$\text{vers}(\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)) \sim \hat{n}(s), \quad \Delta s \rightarrow 0$$



[1]

Vettore Normale (V)

Consideriamo ora il **modulo** del vettore $\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)$.

Abbiamo dimostrato che $P\hat{A}B$ è **isoscele**.

Anche $P\hat{C}P'$ è **isoscele**, in quanto:

$$\overline{PC} = \overline{P'C} = \rho$$

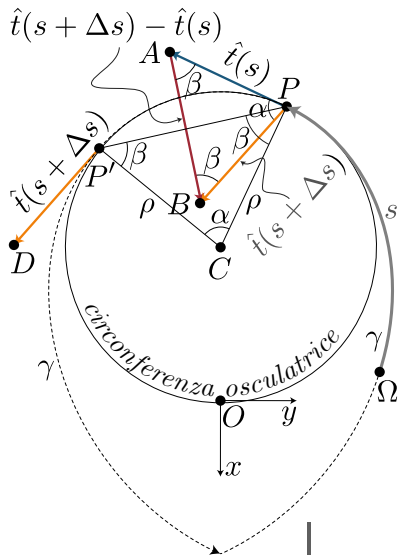
essendo **due raggi** della circonferenza osculatrice.

Poiché inoltre $A\hat{P}B = P\hat{C}P'$, possiamo concludere che i due triangoli sono **simili**:

$$P\hat{A}B \sim P\hat{C}P'$$

dunque hanno i lati proporzionali:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PP'}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{CP}}$$



Abbiamo quindi:

$$\overline{AB} = \frac{\overline{PA}}{\overline{CP}} \overline{PP'}$$

dove:

$$\overline{AB} = \|\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)\|$$

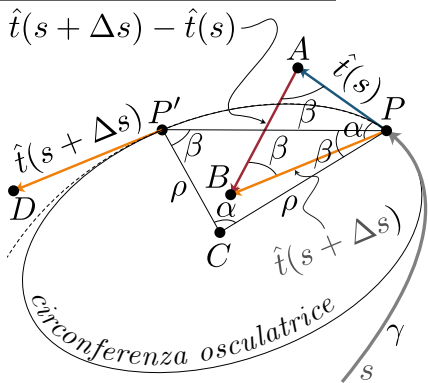
$$\overline{PA} = \|\hat{t}(s)\| = 1$$

$$\overline{CP} = \rho$$

$$\overline{PP'} \sim \Delta s, \quad \Delta s \rightarrow 0$$

Otteniamo quindi:

$$\|\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)\| = \frac{1}{\rho} \overline{PP'} \sim \frac{1}{\rho} \Delta s, \quad \Delta s \rightarrow 0$$



[2]

Vettore Normale (VII)

Dalla [2] (diapositiva 42) e dalla [1] (diapositiva 40), ricordando che $\vec{v} = \|\vec{v}\| \text{vers}(\vec{v})$, ricaviamo:

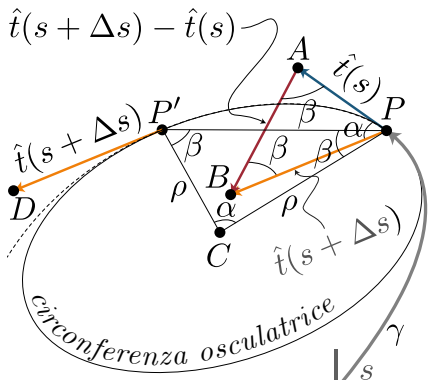
$$\begin{aligned}\Delta \hat{t} &= \hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s) = \|\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)\| \text{vers}(\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)) \sim \\ &\sim \frac{1}{\rho} \Delta s \hat{n}, \quad \Delta s \rightarrow 0\end{aligned}$$

Sostituendo, otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{t}(s)}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta s} = \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\rho} \Delta s \hat{n}}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \hat{n}\end{aligned}$$

quindi:

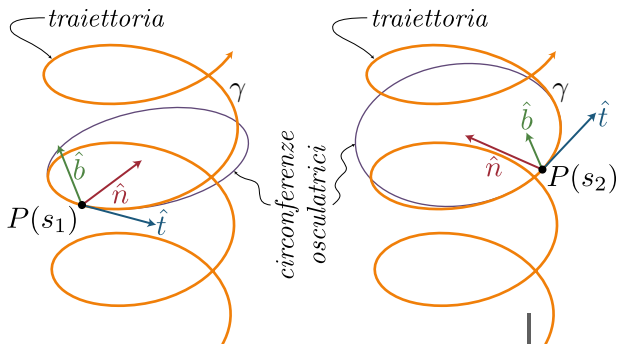
$$\hat{n}(s) = \rho \frac{d\hat{t}(s)}{ds}$$



Il **versore binormale** \hat{b} nel punto P è perpendicolare al piano osculatore alla curva γ nel punto P .

- Dunque deve essere perpendicolare sia a \hat{t} sia a \hat{n} ;
- Può essere costruito mediante il prodotto vettoriale:

$$\hat{b}(s) = \hat{t}(s) \wedge \hat{n}(s)$$



Relazioni di Ortonormalità tra i Versori della Base Intrinseca

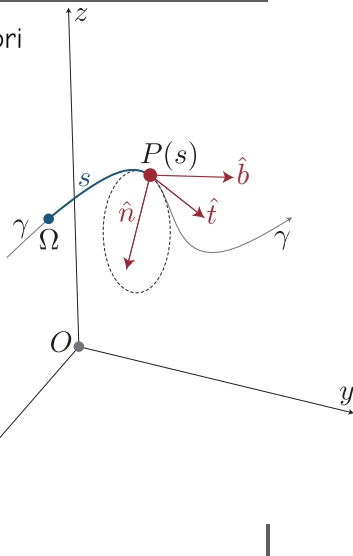
12 relazioni esprimono l'**ortogonalità** dei versori della base, la loro **normalità** (modulo unitario) e la loro **chiralità** (destrorsa):

● Prodotti **scalari**:

$$\begin{aligned}\hat{t} \cdot \hat{t} &= 1, & \hat{n} \cdot \hat{n} &= 1, & \hat{b} \cdot \hat{b} &= 1, \\ \hat{t} \cdot \hat{n} &= 0, & \hat{n} \cdot \hat{b} &= 0, & \hat{b} \cdot \hat{t} &= 0.\end{aligned}$$

● Prodotti **vettoriali**:

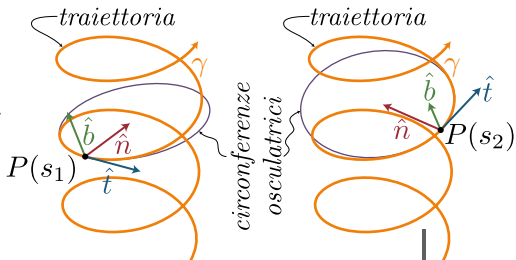
$$\begin{aligned}\hat{t} \wedge \hat{t} &= \vec{0}, & \hat{n} \wedge \hat{n} &= \vec{0}, & \hat{b} \wedge \hat{b} &= \vec{0}, \\ \hat{t} \wedge \hat{n} &= \hat{b}, & \hat{n} \wedge \hat{b} &= \hat{t}, & \hat{b} \wedge \hat{t} &= \hat{n}.\end{aligned}$$



Si chiama **curvatura** della traiettoria γ nel punto P il reciproco del raggio di curvatura della traiettoria γ nel punto P :

$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

- **Maggiore** è la curvatura, **minore** è il raggio di curvatura;
- Se la curvatura è **nulla** la curva è una **retta**;
- La **curvatura** misura **quanto la curva si discosti da una retta**.



Si osservi che dalla relazione:

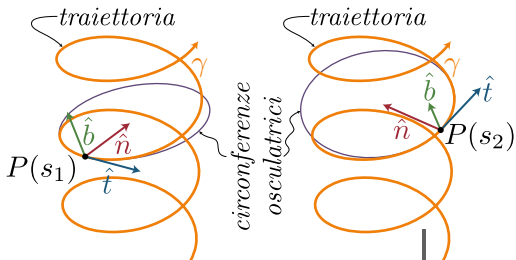
$$\hat{n}(s) = \rho \frac{d\hat{t}(s)}{ds}$$

segue che:

$$\rho \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = \|\hat{n}\| = 1$$

quindi:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\|$$

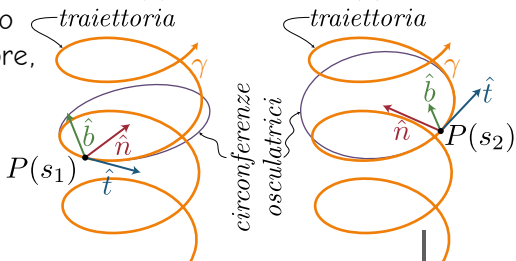


Curvatura e Torsione (III)

Le curve **non piane**, per essere completamente descritte, necessitano, oltre alla curvatura κ , di un **secondo parametro locale** che indichi **quanto decisamente la curva si discosti dall'andamento piano**.

Scorrendo una curva non piana di un tratto infinitesimo, il **piano osculatore** può compiere **rotazioni infinitesime attorno al versore tangente \hat{t}** .

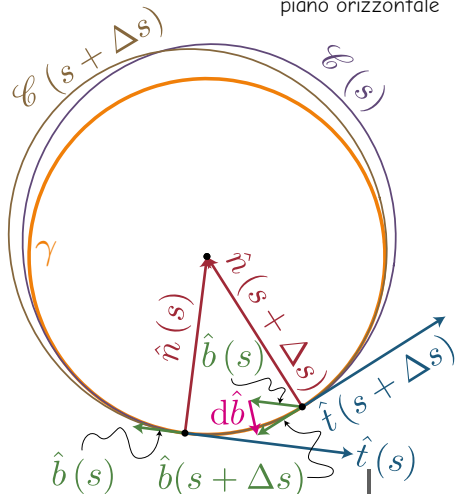
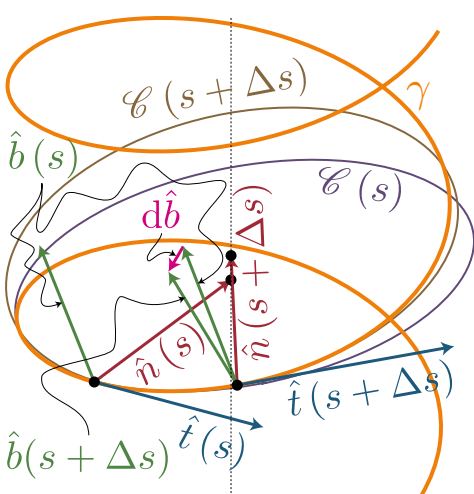
Le corrispondenti **variazioni infinitesime $d\hat{b}(s)$** del versore $\hat{b}(s)$ (normale al piano osculatore) sono sempre parallele al piano osculatore, **nella direzione del versore $\hat{n}(s)$** .



Curvatura e Torsione (IV)

Variazione infinitesima $d\hat{b}(s)$ in un'elica cilindrica.

proiezione su di un piano orizzontale



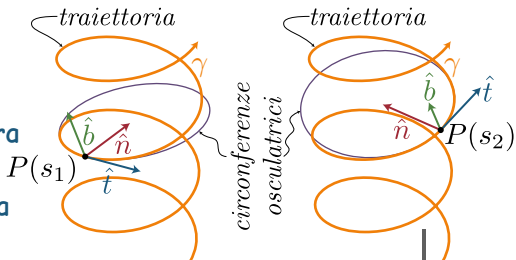
Curvatura e Torsione (V)

Poiché $d\hat{b} \parallel \hat{n}$, il prodotto scalare $d\hat{b}(s) \cdot \hat{n}(s)$ è una quantità scalare infinitesima che indica **quanto decisamente la curva si discosti dal piano osculatore**.

Si può pertanto introdurre un parametro scalare locale, denominato **torsione**, indicato convenzionalmente con il simbolo τ e definito come:

$$\tau(s) = -\hat{n}(s) \cdot \frac{d\hat{b}(s)}{ds}$$

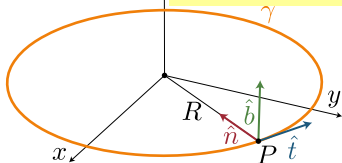
- Se la **torsione** di una curva è sempre **nulla** allora si tratta di una **curva piana**.
- Una **circonferenza** ha **curvatura costante** e **torsione nulla**.
- Un'**elica cilindrica** ha **curvatura costante** e **torsione costante**.



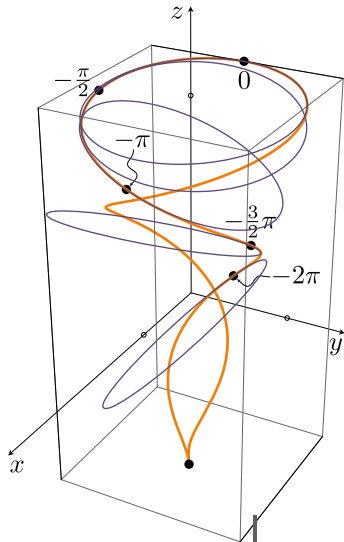
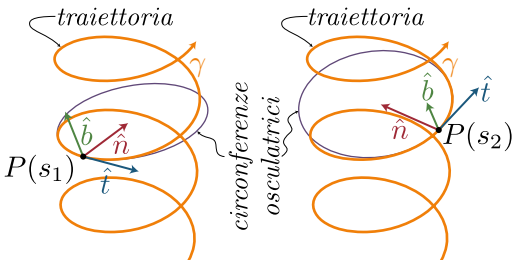
Curvatura e Torsione (VI)

$$\kappa \equiv \text{cost.} \neq 0, \quad \tau \neq \text{cost.} \neq 0$$

$$\kappa = \frac{1}{R} \equiv \text{cost.} \neq 0, \quad \tau = 0$$



$$\kappa \equiv \text{cost.} \neq 0, \quad \tau \equiv \text{cost.} \neq 0$$



Rappresentazione Cartesiana di un Vettore

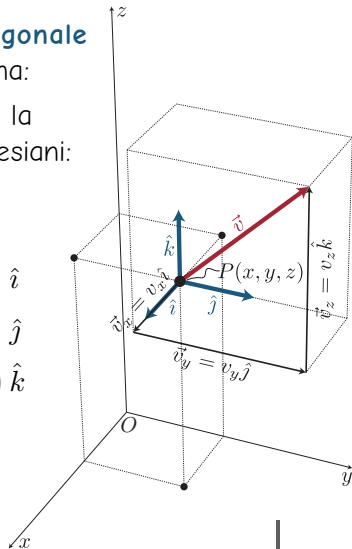
Una volta **scelta** (ad arbitrio) una **terna ortogonale di riferimento** e una base di versori cartesiana:

- **Qualunque vettore** \vec{v} si può scrivere come la **somma** dei suoi 3 vettori componenti cartesiani:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_x = v_x \hat{i} \\ \vec{v}_y = v_y \hat{j} \\ \vec{v}_z = v_z \hat{k} \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = \vec{v} \cdot \hat{i} \\ v_y = \vec{v} \cdot \hat{j} \\ v_z = \vec{v} \cdot \hat{k} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_x = (\vec{v} \cdot \hat{i}) \hat{i} \\ \vec{v}_y = (\vec{v} \cdot \hat{j}) \hat{j} \\ \vec{v}_z = (\vec{v} \cdot \hat{k}) \hat{k} \end{cases}$$

Componenti cartesiane
Vettori componenti cartesiani



Rappresentazione Cilindrica di un Vettore

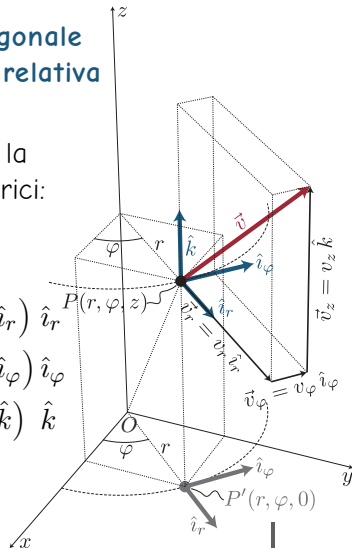
Una volta **scelta** (ad arbitrio) una **terna ortogonale di riferimento**, nella base di versori cilindrica **relativa al suo punto di applicazione**:

- Qualunque vettore \vec{v} si può scrivere come la **somma** dei suoi 3 vettori componenti cilindrici:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi + \vec{v}_z = v_r \hat{i}_r + v_\varphi \hat{i}_\varphi + v_z \hat{k}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = v_r \hat{i}_r \\ \vec{v}_\varphi = v_\varphi \hat{i}_\varphi \\ \vec{v}_z = v_z \hat{k} \end{cases} \quad \begin{cases} v_r = \vec{v} \cdot \hat{i}_r \\ v_\varphi = \vec{v} \cdot \hat{i}_\varphi \\ v_z = \vec{v} \cdot \hat{k} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_r = (\vec{v} \cdot \hat{i}_r) \hat{i}_r \\ \vec{v}_\varphi = (\vec{v} \cdot \hat{i}_\varphi) \hat{i}_\varphi \\ \vec{v}_z = (\vec{v} \cdot \hat{k}) \hat{k} \end{cases}$$

Componenti cilindriche
Vettori componenti cilindrici



Rappresentazione Sferica di un Vettore

Una volta **scelta** (ad arbitrio) una **terna ortogonale di riferimento**, nella base di versori sferica **relativa al suo punto di applicazione**:

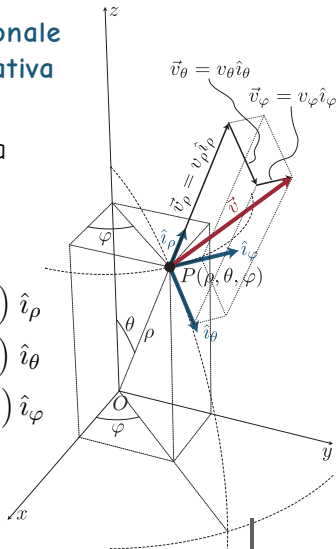
- **Qualunque vettore** \vec{v} si può scrivere come la **somma** dei suoi 3 vettori componenti sferici:

$$\vec{v} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi = v_\rho \hat{i}_\rho + v_\theta \hat{i}_\theta + v_\varphi \hat{i}_\varphi$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\rho = v_\rho \hat{i}_\rho \\ \vec{v}_\theta = v_\theta \hat{i}_\theta \\ \vec{v}_\varphi = v_\varphi \hat{i}_\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} v_\rho = \vec{v} \cdot \hat{i}_\rho \\ v_\theta = \vec{v} \cdot \hat{i}_\theta \\ v_\varphi = \vec{v} \cdot \hat{i}_\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_\rho = (\vec{v} \cdot \hat{i}_\rho) \hat{i}_\rho \\ \vec{v}_\theta = (\vec{v} \cdot \hat{i}_\theta) \hat{i}_\theta \\ \vec{v}_\varphi = (\vec{v} \cdot \hat{i}_\varphi) \hat{i}_\varphi \end{cases}$$

Componenti sferiche

Vettori componenti sferici



Rappresentazione Intrinseca di un Vettore

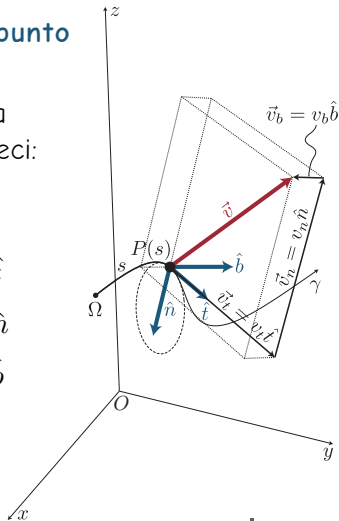
Nella base di versori intrinseca **relativa al suo punto di applicazione**:

- **Qualunque vettore** \vec{v} si può scrivere come la **somma** dei suoi 3 vettori componenti intrinseci:

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_n + \vec{v}_b = v_t \hat{t} + v_n \hat{n} + v_b \hat{b}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_t = v_t \hat{t} \\ \vec{v}_n = v_n \hat{n} \\ \vec{v}_b = v_b \hat{b} \end{cases} \quad \begin{cases} v_t = \vec{v} \cdot \hat{t} \\ v_n = \vec{v} \cdot \hat{n} \\ v_b = \vec{v} \cdot \hat{b} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{v}_t = (\vec{v} \cdot \hat{t}) \hat{t} \\ \vec{v}_n = (\vec{v} \cdot \hat{n}) \hat{n} \\ \vec{v}_b = (\vec{v} \cdot \hat{b}) \hat{b} \end{cases}$$

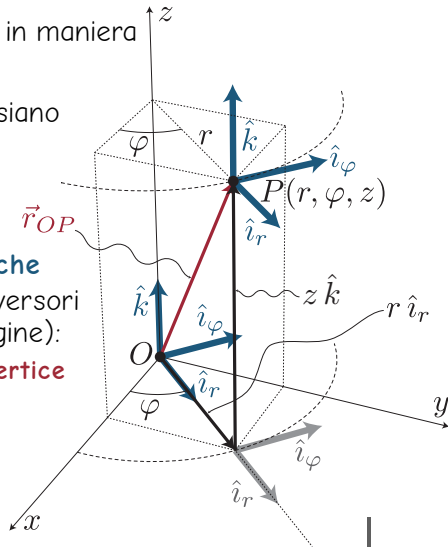
Componenti intrinseche
Vettori componenti intrinseci



Rappresentazione di un Vettore Posizionale

I **vettori posizionali** si rappresentano in maniera simile agli altri vettori:

- Si suppone che i vettori posizionali siano **applicati nell'origine O** della terna ortogonale di riferimento.
- Tuttavia l'**origine** è un punto **singolare** per le coordinate **cilindriche** e **sferiche** (non esiste una base di versori cilindrica o sferica assegnata all'origine):
 - Si sceglie la **base posizionata nel vertice del vettore posizionale**.



Rappresentazione Cartesiana di un Vettore Posizionale

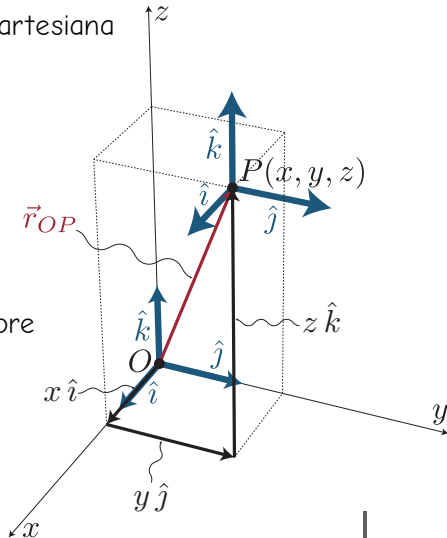
Analogamente alla rappresentazione cartesiana di un **vettore generico**:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

la rappresentazione cartesiana di un **vettore posizionale** si scrive:

$$\vec{r}_{OP} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

Le tre componenti cartesiane del vettore posizionale \vec{r}_{OP} sono uguali alle tre coordinate cartesiane del punto P .



Rappresentazione Cilindrica di un Vettore Posizionale

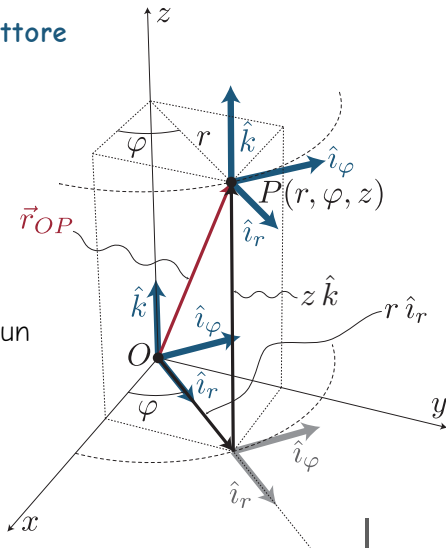
La rappresentazione cilindrica di un **vettore generico**:

$$\vec{v} = v_r \hat{i}_r + v_\varphi \hat{i}_\varphi + v_z \hat{k}$$

si semplifica nel caso di un **vettore posizionale** come:

$$\vec{r}_{OP} = r \hat{i}_r(\varphi) + z \hat{k}$$

La componente cilindrica azimutale di un vettore posizionale è sempre nulla.



Rappresentazione Sferica di un Vettore Posizionale

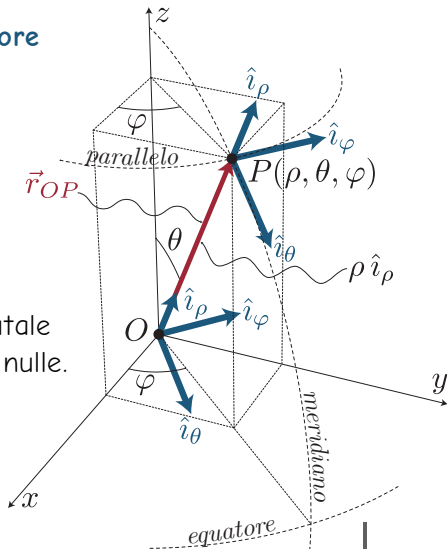
La rappresentazione sferica di un **vettore generico**:

$$\vec{v} = v_\rho \hat{i}_\rho + v_\theta \hat{i}_\theta + v_\varphi \hat{i}_\varphi$$

si semplifica nel caso di un **vettore posizionale** come:

$$\vec{r}_{OP} = \rho \hat{i}_\rho(\theta, \varphi)$$

Le componenti sferiche polare e azimutale di un vettore posizionale sono sempre nulle.



Dato un **vettore ben definito**, esso ha una **differente espressione cartesiana per ogni differente base cartesiana** che si considera, corrispondente a una differente terna ortogonale di riferimento:

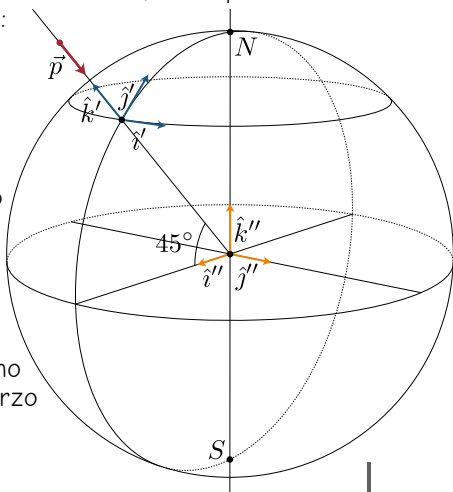
- Nell'esempio in figura consideriamo la forza peso di un oggetto di peso pari a 2 Newton.

- Usando la base cartesiana ortogonale $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$, con i primi due assi sul piano orizzontale e il terzo asse verticale, si ha:

$$\vec{p} = -2 \text{ N } \hat{k}'$$

- Usando invece la base cartesiana $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$, con i primi due assi sul piano perpendicolare all'asse terrestre e il terzo asse lungo l'asse terrestre, si ha:

$$\vec{p} = -\sqrt{2} \text{ N } \hat{i}'' - \sqrt{2} \text{ N } \hat{k}''$$



Vettori e Rappresentazioni di Vettori (II)

Tuttavia, **fissata** una **base** di versori cartesiana, vi è una **corrispondenza biunivoca** tra **vettori** e **terne ordinate** di numeri reali (le componenti cartesiane):

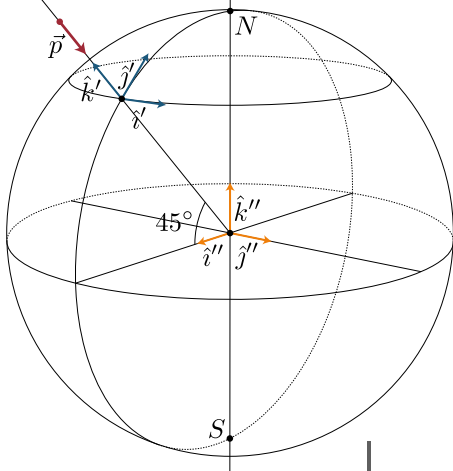
$$\vec{v} [\in V] \xrightarrow[\text{su}]{1-1} (v_x, v_y, v_z) [\in \mathbb{R}^3]$$

- Nell'esempio in figura, fissata la base di versori $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$, si ha:

$$\vec{p} \mapsto (0, 0, -2) \text{ N}$$

- Fissata invece la base di versori $\{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\}$, si ha:

$$\vec{p} \mapsto (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \text{ N}$$



Vettori e Rappresentazioni di Vettori (III)

Per non sbagliare, quando rappresentiamo un vettore in coordinate cartesiane, invece delle notazioni:

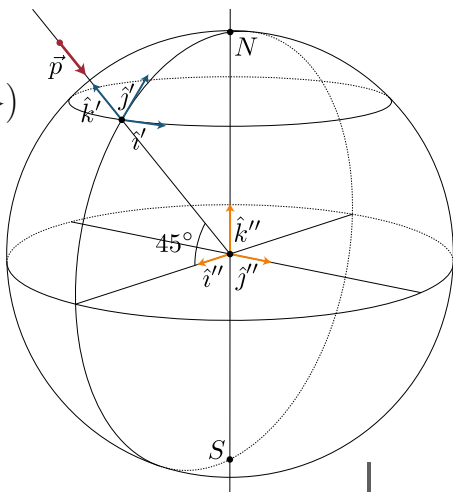
$$(0, 0, -2) \text{ N} \quad (\text{base } \{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\})$$

$$(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \text{ N} \quad (\text{base } \{\hat{i}'', \hat{j}'', \hat{k}''\})$$

utilizziamo **sempre** la notazione:

$$\vec{p} = -2 \hat{k}' \text{ N} = (-\sqrt{2} \hat{i}'' - \sqrt{2} \hat{k}'') \text{ N}$$

che ci ricorda sempre quale base stiamo utilizzando.



Vettori e Rappresentazioni di Vettori (IV)

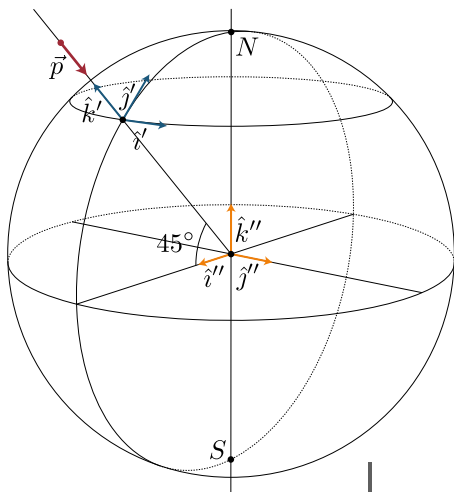
Per chiarezza, nella base cartesiana, possiamo scrivere:

$$\hat{\mathbf{e}}^{(\text{cart})} = [\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k}] ,$$

$$\mathbf{v}^{(\text{cart})} = (v_x, v_y, v_z) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

La relazione tra **vettore** \vec{v} , **base di versori** $\hat{\mathbf{e}}^{(\text{cart})}$ e **rappresentazione del vettore** $\mathbf{v}^{(\text{cart})}$ si può così scrivere, mediante il **prodotto righe per colonne**, come:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \hat{\mathbf{e}}^{(\text{cart})} \mathbf{v}^{(\text{cart})} = [\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k}] \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \\ &= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \end{aligned}$$



La **rappresentazione di un vettore**, $\mathbf{v}^{(\text{cart})} = (v_x, v_y, v_z) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$:

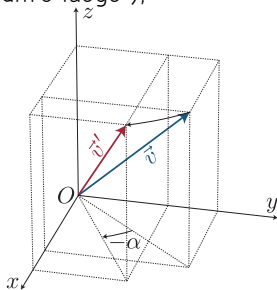
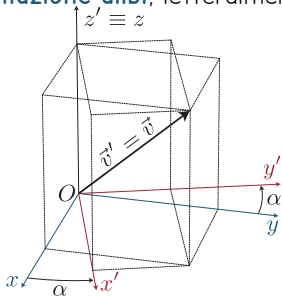
- È estremamente **utile** nel calcolo vettoriale:
 - Consente di **tradurre in forma algebrica** le **operazioni geometriche tra grandezze vettoriali**.
- **Non è sufficiente** per affrontare il **cambiamento della base di versori**:
 - P. es., in fisica, il **cambiamento del Sistema di Riferimento**:
 - ▶ P. es.: per comprendere le pseudo-forze.
 - È necessario considerare esplicitamente la **base di versori** $\hat{\mathbf{e}}^{(\text{cart})} = [\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k}]$ e il **vettore** propriamente detto (il vettore **fisico**) $\vec{v} = \hat{\mathbf{e}} \mathbf{v}$:

$$\vec{v} = \hat{\mathbf{e}}^{(\text{cart})} \mathbf{v}^{(\text{cart})} = [\hat{i} \ \hat{j} \ \hat{k}] \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

Trasformazioni Attive e Passive

La trasformazione **delle componenti** cartesiane v di un vettore \vec{v} è la **medesima** nelle seguenti due trasformazioni:

- Rotazione **del riferimento** $Oxyz$ di un angolo α in senso antiorario attorno all'asse z , con il vettore \vec{v} invariato (**trasformazione passiva**, o **trasformazione alias**, letteralmente "altrimenti detto");
- Rotazione **del vettore** \vec{v} di un angolo α in senso orario (cioè di un angolo $-\alpha$) attorno all'asse z , con il riferimento $Oxyz$ invariato (**trasformazione attiva**, o **trasformazione alibi**, letteralmente "in un altro luogo");



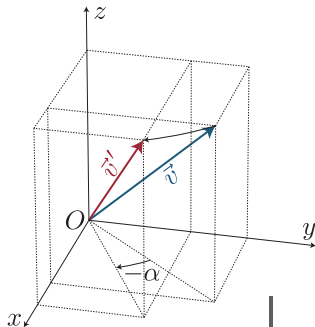
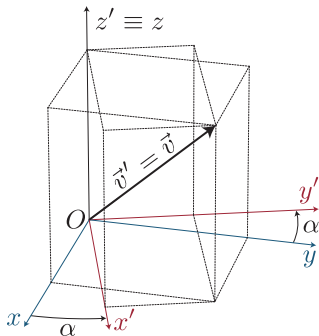
Trasformazioni Attive e Passive (II)

La differenza tra i due tipi di trasformazione è la **base di versori \hat{e}** , la quale:

- Si **modifica** nelle trasformazioni **passive**;
- Rimane **invariata** nelle trasformazioni **attive**.

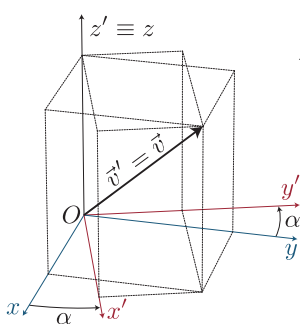
e il **vettore $\vec{v} = \hat{e} v$** , il quale:

- Rimane **invariato** nelle trasformazioni **passive**;
- Si **modifica** nelle trasformazioni **attive**.

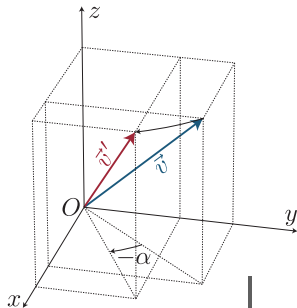


Trasformazioni Attive e Passive (III)

| | Trasformazioni | |
|---------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| | passive (alias) | attive (alibi) |
| Riferimento $Oxyz$ | modificato | invariato |
| Base di versori \hat{e} | modificata: $\hat{e}' = \hat{e}R$ | invariata: $\hat{e}' = \hat{e}$ |
| Componenti v | modificate: $v' = R^T v$ | modificate: $v' = Rv$ |
| Vettore \vec{v} | invariato: $\vec{v}' = \vec{v}$ | modificato: $\vec{v}' = \hat{e}Rv$ |

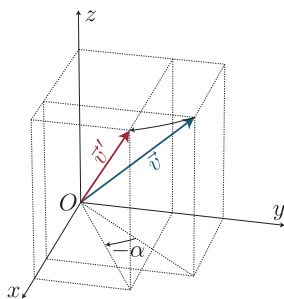
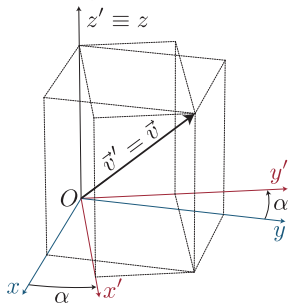


$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



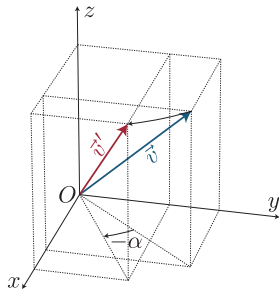
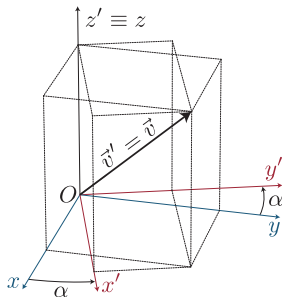
Trasformazioni Attive e Passive (IV)

- Il termine generico **trasformazione** — così come i termini più specifici **traslazione**, **rotazione**, **riflessione** e **inversione** — sono **spesso** utilizzati, nei testi di matematica, fisica e ingegneria, **senza ulteriori precisazioni**.
 - Essi si possono riferire **sia** a trasformazioni **passive** **sia** a trasformazioni **attive**.
- Per **comprendere** correttamente testi scritti da autori diversi, magari pertinenti a diverse discipline, è necessario **chiarire** se si tratti di trasformazioni attive o passive, leggendo con attenzione il modo in cui tali trasformazioni sono introdotte.



Trasformazioni Attive e Passive (V)

- Nei testi di **matematica** si considerano quasi sempre a trasformazioni **attive**:
 - Nelle quali la **base** di versori $\hat{e} = [\hat{i} \hat{j} \hat{k}]$ non è **mai modificata**;
 - ▶ Per questo motivo la base di versori è spesso **omessa** nelle espressioni e i vettori sono spesso indicati mediante le sole componenti.
- Nei testi di **fisica** e **ingegneria** si considerano **entrambi** i tipi:
 - Nei testi di **relatività** si considerano sempre trasformazioni **passive**;
 - Nei testi di **meccanica quantistica** l'uso di trasformazioni **attive** e **passive** è più o meno ugualmente diffuso.





Operazioni tra Vettori nella Base Cartesiana

Nella **base cartesiana**, in virtù della sua natura **globale**, le **operazioni tra vettori** (anche applicati in punti diversi) si **traducono** semplicemente in **operazioni numeriche tra le componenti dei vettori**:

- Abbandonando qualunque considerazione di carattere geometrico.

Fissata una **base cartesiana di versori**:

- Due vettori sono **uguali** se e soltanto se sono uguali le 3 corrispondenti componenti cartesiane.
- Un vettore è **nullo** se e soltanto se sono nulle tutte e 3 le componenti cartesiane.

Operazioni tra Vettori nella Base Cartesiana (II)

Posto (rappresentazione cartesiana):

$$\vec{a} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}), \quad \vec{b} = (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \vec{a} \pm \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \pm (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = \\ &= (a_x \hat{i} \pm b_x \hat{i}) + (a_y \hat{j} \pm b_y \hat{j}) + (a_z \hat{k} \pm b_z \hat{k}) = \\ &= (a_x \pm b_x) \hat{i} + (a_y \pm b_y) \hat{j} + (a_z \pm b_z) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \vec{a} &= \alpha (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) = \\ &= \alpha (a_x \hat{i}) + \alpha (a_y \hat{j}) + \alpha (a_z \hat{k}) = \\ &= (\alpha a_x) \hat{i} + (\alpha a_y) \hat{j} + (\alpha a_z) \hat{k} \end{aligned}$$

Operazioni tra Vettori nella Base Cartesiana (III)

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = \\
 &= (a_x \hat{i}) \cdot (b_x \hat{i}) + (a_x \hat{i}) \cdot (b_y \hat{j}) + (a_x \hat{i}) \cdot (b_z \hat{k}) + \\
 &\quad + (a_y \hat{j}) \cdot (b_x \hat{i}) + (a_y \hat{j}) \cdot (b_y \hat{j}) + (a_y \hat{j}) \cdot (b_z \hat{k}) + \\
 &\quad + (a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i}) + (a_z \hat{k}) \cdot (b_y \hat{j}) + (a_z \hat{k}) \cdot (b_z \hat{k}) = \\
 &= (a_x b_x) \underbrace{(\hat{i} \cdot \hat{i})}_1 + (a_x b_y) \underbrace{(\hat{i} \cdot \hat{j})}_0 + (a_x b_z) \underbrace{(\hat{i} \cdot \hat{k})}_0 + \\
 &\quad + (a_y b_x) \underbrace{(\hat{j} \cdot \hat{i})}_0 + (a_y b_y) \underbrace{(\hat{j} \cdot \hat{j})}_1 + (a_y b_z) \underbrace{(\hat{j} \cdot \hat{k})}_0 + \\
 &\quad + (a_z b_x) \underbrace{(\hat{k} \cdot \hat{i})}_0 + (a_z b_y) \underbrace{(\hat{k} \cdot \hat{j})}_0 + (a_z b_z) \underbrace{(\hat{k} \cdot \hat{k})}_1 = \\
 &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z
 \end{aligned}$$



Operazioni tra Vettori nella Base Cartesiana (IV)

In particolare:

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Operazioni tra Vettori nella Base Cartesiana (V)

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \wedge (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = \\
 &= (a_x \hat{i}) \wedge (b_x \hat{i}) + (a_x \hat{i}) \wedge (b_y \hat{j}) + (a_x \hat{i}) \wedge (b_z \hat{k}) + \\
 &\quad + (a_y \hat{j}) \wedge (b_x \hat{i}) + (a_y \hat{j}) \wedge (b_y \hat{j}) + (a_y \hat{j}) \wedge (b_z \hat{k}) + \\
 &\quad + (a_z \hat{k}) \wedge (b_x \hat{i}) + (a_z \hat{k}) \wedge (b_y \hat{j}) + (a_z \hat{k}) \wedge (b_z \hat{k}) = \\
 &= (a_x b_x) \underbrace{(\hat{i} \wedge \hat{i})}_{\vec{0}} + (a_x b_y) \underbrace{(\hat{i} \wedge \hat{j})}_{\hat{k}} + (a_x b_z) \underbrace{(\hat{i} \wedge \hat{k})}_{-\hat{j}} + \\
 &\quad + (a_y b_x) \underbrace{(\hat{j} \wedge \hat{i})}_{-\hat{k}} + (a_y b_y) \underbrace{(\hat{j} \wedge \hat{j})}_{\vec{0}} + (a_y b_z) \underbrace{(\hat{j} \wedge \hat{k})}_{\hat{i}} + \\
 &\quad + (a_z b_x) \underbrace{(\hat{k} \wedge \hat{i})}_{\hat{j}} + (a_z b_y) \underbrace{(\hat{k} \wedge \hat{j})}_{-\hat{i}} + (a_z b_z) \underbrace{(\hat{k} \wedge \hat{k})}_{\vec{0}} = \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}
 \end{aligned}$$

Operazioni tra Vettori nella Base Cartesiana (VI)

Utilizzando ora la definizione di **determinante** di una **matrice** e le relative regole di calcolo, possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} = \\ &= \hat{i} \det \begin{bmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{bmatrix} - \hat{j} \det \begin{bmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{bmatrix} + \hat{k} \det \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Operazioni tra Vettori nella Base Cartesiana (VII)

Essendo:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

$$\vec{c} = (c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k})$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c} &= \left[(a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} \right] \cdot \left[c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k} \right] = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z \end{aligned}$$

Operazioni tra Vettori nella Base Cartesiana (VIII)

Utilizzando ora la definizione di **determinante** di una **matrice** e le relative regole di calcolo, possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c} &= (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z = \\ &= c_x \det \begin{bmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{bmatrix} - c_y \det \begin{bmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{bmatrix} + c_z \det \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}\end{aligned}$$



Operazioni tra Vettori nella Base Cartesiana (IX)

Nella rappresentazione cartesiana si possono anche facilmente dimostrare le **identità vettoriali** (sviluppo del **doppio prodotto vettoriale**):

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$$

Infatti, prendendo, per esempio, la componente x della prima identità, si ottiene:

$$\begin{aligned} [(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}]_x &= (\vec{a} \wedge \vec{b})_y c_z - (\vec{a} \wedge \vec{b})_z c_y = \\ &= (\underline{a_z b_x} - \overline{a_x b_z}) c_z - (\overline{a_x b_y} - \underline{a_y b_x}) c_y \\ [(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}]_x &= (\cancel{a_x c_x} + \underline{a_y c_y} + \underline{a_z c_z}) b_x - (\cancel{b_x c_x} + \overline{b_y c_y} + \overline{b_z c_z}) a_x \\ \Rightarrow [(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}]_x &= [(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}]_x \end{aligned}$$



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Domenico Galli

Dipartimento di Fisica e Astronomia

`domenico.galli@unibo.it`

`https://www.unibo.it/sitoweb/domenico.galli`

`https://wiki-lhcb.bo.infn.it/bin/view/GalliDidattica`

